

## ОПТИМИЗАЦИЯ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ РАВНОМЕРНОМ СЖАТИИ

*Надежда ТРИФАНОВА*

*Центр информационных технологий*

Se cercetează comportarea plăcilor ortotropice solicitate cu forțele externe ce acționează în planul plăcii. Se presupune că direcția forțelor aplicate nu se schimbă în procesul deformării. Proprietățile ortotropice ale plăcilor se descriu prin dependența  $\varphi(x,y)$  care reprezintă unghiul înclinării axelor de ortotropie în punctul cu coordonate  $(x, y) \in \Omega$  la axele sistemului de coordonate al plăcii. Forța critică de pierdere a stabilității depinde în principal de distribuția unghiului de anizotropie. Se examinează problema privind proiectarea plăcilor ortotropice cu valoarea extremală a forței critice de pierdere a stabilității prin alegerea rațională a unghiului de ortotropie  $\varphi(x, y)$ .

Calcululele numerice ale forțelor critice au fost efectuate cu ajutorul metodei de elemente finite, dar problema de optimizare a fost rezolvată prin metoda de optimizare succesivă. Soluția optimală a fost obținută pentru placa pătrată simplă rezemată din sticlă-plastic solicitată cu forțele de compresiune la contur. Calcululele numerice au demonstrat că numai distribuția optimă a unghiului de anizotropie poate majora suficient forța critică de pierdere a stabilității.

The behavior of elastic orthotropic plates subjected to compressive inplane loads is examined. The case of conservative loads is considered, i.e. the direction of applied loads is considered permanently during the deformation. Anisotropic properties of plates are described by the function  $\varphi(x,y)$  that represent the angle between axes of orthotropy in the point  $(x,y)$  and co-ordinates  $xy$  connected with the plate. The loads applied to the boundary of the plate are varied proportionally to a parameter  $\lambda$ . Then this parameter runs up to the value called critical, the plate becomes unstable and bulges. The value of critical buckling load depends on as both the rigid and orthotropic properties of the plate. The problem of maximization of critical buckling load with respect to orthotropic orientations  $\varphi(x,y)$  is considered.

Numeric calculations of critical buckling loads were performed by using the finite element method. The problem of optimization was solved using the method of sequential optimization. Calculations were done for square uniformly compressed simply supported plate made of glass-fiber material. Numeric calculations have shown that only by means accurate choice of fiber orientations the critical buckling load can be significantly increased.

Исследуется поведение упругой ортотропной пластины, нагруженной сжимающими силами, приложенными к внешнему контуру пластины. Предполагается, что направление внешних нагрузок, воздействующих на пластину, не меняется в процессе деформации. Анизотропные свойства пластины описываются функцией  $\varphi(x, y)$  – углом наклона осей ортотропии в точке с координатами  $(x, y)$  к осям связанной с пластиной неподвижной системы координат. Прикладываемые в срединной плоскости пластины силы изменяются пропорционально параметру  $\lambda$ , и при некотором значении этого параметра, называемом критическим, плоская пластина теряет свое равновесие, выпучивается и принимает изогнутую форму, описываемую функцией  $w(x, y)$ ;  $w(x, y)$  представляет собой смещение из плоскости. Критическая сила потери устойчивости анизотропной пластины, наряду с другими механическими и геометрическими характеристиками, существенным образом зависит от распределения угла анизотропии. Рассматривается задача проектирования ортотропной пластины с экстремальным значением критической силы потери устойчивости за счет рационального выбора угла анизотропии  $\varphi(x, y)$ .

### 1. Математическая формулировка задачи

Критическая сила потери устойчивости может быть определена из условия минимума функционала [1]:

$$\lambda = \frac{\int_{\Omega} V(\varphi; w) dx dy}{-\int_{\Omega} A(\varphi; w) dx dy} \rightarrow \min_w, \quad (1)$$

где  $V(\varphi, w)$  – плотность потенциальной энергии изгиба,  $A(\varphi, w)$  – плотность работы внешних сил на перемещениях пластины при потере устойчивости,  $w(x, y)$  – прогиб пластины при ее выпучивании. При этом величина этой работы отвечает значению внешних нагрузок, характеризуемых значением  $\lambda = 1$ . Через  $\Omega$  обозначена область, занимаемая пластиной.

Плотность потенциальной энергии поперечного изгиба ортотропной пластины и плотности работы внешних сил при поперечной деформации определяются выражениями [1]:

$$V(\varphi, w) = \frac{1}{2}[D_{11}(\varphi)w_{xx}^2 + 2D_{12}(\varphi)w_{xx}w_{yy} + D_{22}(\varphi)w_{yy}^2 + 4(D_{16}(\varphi)w_{xx} + D_{26}(\varphi)w_{yy})w_{xy} + 4D_{66}(\varphi)w_{xy}^2], \quad (2)$$

$$A(\varphi, w) = \frac{1}{2}(N_{xx}^0(\varphi)w_x^2 + 2N_{xy}^0(\varphi)w_xw_y + N_{yy}^0(\varphi)w_y^2), \quad (3)$$

где  $N_{xx}^0 = h\sigma_{xx}^0(\varphi)$ ,  $N_{xy}^0 = h\sigma_{xy}^0(\varphi)$ ,  $N_{yy}^0 = h\sigma_{yy}^0(\varphi)$ ,

$h$  – толщина пластинки,  $\sigma_{xx}^0(\varphi)$ ,  $\sigma_{xy}^0(\varphi)$ ,  $\sigma_{yy}^0(\varphi)$  – компоненты тензора напряжений плоского напряженно-деформированного докритического состояния пластины, вызванного внешними усилиями, отвечающими значению  $\lambda = 1$ ,  $D_{ij}(\varphi)$  – изгибные жесткости пластины. Компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}^0(\varphi)$ ,  $\sigma_{xy}^0(\varphi)$ ,  $\sigma_{yy}^0(\varphi)$  удовлетворяют уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^0(\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^0(\varphi)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}^0(\varphi)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}^0(\varphi)}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

и обобщенному закону Гука [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^0(\varphi) &= A_{11}(\varphi)\frac{\partial u}{\partial x} + A_{12}(\varphi)\frac{\partial v}{\partial y} + A_{16}(\varphi)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \\ \sigma_{yy}^0(\varphi) &= A_{12}(\varphi)\frac{\partial u}{\partial x} + A_{22}(\varphi)\frac{\partial v}{\partial y} + A_{26}(\varphi)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \\ \sigma_{xy}^0(\varphi) &= A_{16}(\varphi)\frac{\partial u}{\partial x} + A_{26}(\varphi)\frac{\partial v}{\partial y} + A_{66}(\varphi)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \end{aligned} \quad (5)$$

а изгибные жесткости  $D_{ij}(\varphi)$  определяются из соотношений [3]:

$$\begin{aligned} D_{11}(\varphi) &= D_x \cos^4 \varphi + 2D_3 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + D_y \sin^4 \varphi, \\ D_{12}(\varphi) &= D_1 + (D_x + D_y - 2D_3) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi, \\ D_{22}(\varphi) &= D_x \sin^4 \varphi + 2D_3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + D_y \cos^4 \varphi, \\ D_{16}(\varphi) &= (D_x \cos^2 \varphi - D_y \sin^2 \varphi - D_3 \cos 2\varphi) \cos \varphi \sin \varphi, \\ D_{26}(\varphi) &= (D_x \sin^2 \varphi - D_y \cos^2 \varphi + D_3 \cos 2\varphi) \cos \varphi \sin \varphi, \\ D_{66}(\varphi) &= D_{xy} + (D_x + D_y - 2D_3) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $D_1, D_x, D_y, D_{xy}, D_3$  определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{E_1 \nu_{12} h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_x = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_y = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_{xy} = \frac{G_1 h^3}{12}, \\ D_3 &= D_1 + 2D_{xy} \end{aligned} \quad (7)$$

Выражения для вычисления коэффициентов ортотропии  $A_{ij}(\varphi)$  в фиксированной системе координат  $(x, y)$  аналогичны формулам для коэффициентов  $D_{ij}(\varphi)$  с соответствием  $D_{ij}(\varphi) \rightarrow A_{ij}(\varphi)$  и значениями изгибных жесткостей и постоянных ортотропии

$$\begin{aligned} D_x \rightarrow A_{11}^0 &= \frac{E_1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})}, & D_y \rightarrow A_{22}^0 &= \frac{E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})}, & D_{xy} \rightarrow A_{66}^0 &= G_{12}, \\ D_1 \rightarrow A_{12}^0 &= \frac{E_1\nu_{12}}{(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \end{aligned} \quad (8)$$

при этом  $E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, \nu_{21}$  ( $E_1\nu_{12} = E_2\nu_{21}$ ) – технические постоянные анизотропного материала.

Рассматриваемая задача оптимизации состоит в нахождении распределения угла анизотропии, для которого критическая сила потери устойчивости принимает максимальное значение:

$$\varphi(x, y): \quad \lambda(\varphi(x, y)) \rightarrow \max_{\varphi(x, y)}. \quad (9)$$

## 2. Дискретная формулировка задачи оптимизации

Для численного решения сформулированной задачи оптимизации применялся метод конечных элементов. Область, занимаемая пластиной, разбивалась на  $N_e$  треугольных элементов, на каждом из которых функция прогиба  $w(x, y)$  аппроксимировалась кубическим полиномом (элемент Зенкевича), а функция перемещений  $(u(x, y), v(x, y))$  в плоскости пластины – линейными функциями [4].

В результате дискретизации конечноэлементная формулировка задачи определения критической силы потери устойчивости принимает следующий вид:

$$\lambda(\vec{\varphi}) = \min_{\{\vec{w}\}} \frac{(\{\vec{w}\}, [K_{uzg}(\vec{\varphi})\{\vec{w}\}])}{-(\{\vec{w}\}, [K_g(\vec{\varphi}, \{\vec{q}\})\{\vec{w}\}])}, \quad (10)$$

где  $\{\vec{w}\}, \{\vec{q}\}$  – глобальные векторы узловых перемещений, описывающих изгиб и плоское деформированное состояние соответственно,  $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{N_e})$  – вектор углов ориентации осей ортотропии, при этом принимается, что в пределах элемента угол постоянен. Через  $[K_{uzg}(\vec{\varphi})\{\vec{w}\}]$ ,  $[K_g(\vec{\varphi}, \{\vec{q}\})\{\vec{w}\}]$  обозначены глобальная матрица жесткости и глобальная геометрическая матрица жесткости пластины соответственно.

Из необходимого условия оптимальности вариационной задачи (10) приходим к алгебраической задаче на собственные значения:

$$[K_{uzg}(\vec{\varphi})\{\vec{w}\}] = -\lambda[K_g(\vec{\varphi}, \{\vec{q}\})\{\vec{w}\}], \quad (11)$$

где глобальный вектор перемещений  $\{\vec{q}\}$  находится из решения плоской задачи теории упругости

$$[K_{nl}(\vec{\varphi})\{\vec{q}\}] = \{\vec{f}\}. \quad (12)$$

Через  $[K_{nl}(\vec{\varphi})]$  обозначена глобальная матрица жесткости плоской задачи,  $\{\vec{f}\}$  – глобальный вектор действующих в плоскости пластины внешних узловых нагрузок, отвечающих значению параметра  $\lambda = 1$ .

Обозначим через  $\lambda_1$  минимальное значение критической силы потери устойчивости, полученное из решения задачи на собственные значения (11). Тогда конечноэлементная формулировка задачи оптимизации определяется следующим образом: найти распределение угла анизотропии  $\vec{\varphi}^{opt} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_e})$  доставляющего экстремум функционалу

$$\lambda_1(\vec{\varphi}) \rightarrow \max_{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_e}} \left( \min_{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N_e}} \right). \quad (13)$$

### 3. Численное решение задачи оптимизации

Численные расчеты были выполнены для шарнирно закрепленной по граничному контуру квадратной пластины единичной площади, изготовленной из стеклопластика, характеризуемого значениями упругих модулей:  $E_1 / E_2 = 3$ ,  $E_1 / G_{12} = 6$ ,  $E_1 / G_{13} = 6$ ,  $\nu_{12} = 0.83$ ,  $\nu_{21} = 0.25$ .

При проведении численных расчетов пластину разбивали на  $N = 800$  конечных элементов. Схема разбиения на конечные элементы показана на рис.1. С учетом симметричности области приложенных нагрузок и граничных условий, оптимальное распределения угла анизотропии искалось в классе функций  $\varphi(x, y)$ , сохраняющих симметрию квадрата, т.е. симметричных относительно преобразований симметрии квадрата – отражений в плоскостях, проходящих через диагонали квадрата и середины его сторон, а также вращений пластинки относительно ее центра на углы, кратные  $\pi / 4$ . В качестве начального приближения выбиралось  $\varphi(x, y) = -\pi / 4$  на  $1/8$  пластины.

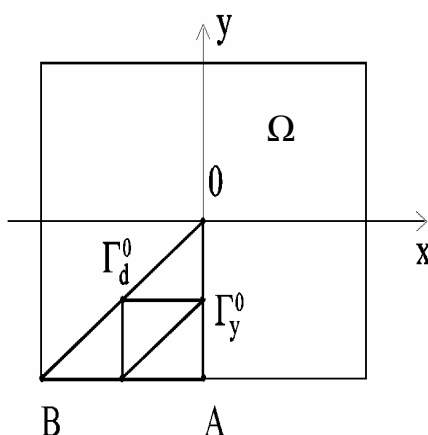


Рис.1. Схема разбиения квадратной пластины на треугольные элементы.

Для численного решения задачи оптимизации применялся градиентный метод [5], в соответствии с которым

$$\bar{\varphi}_{n+1} = \bar{\varphi}_n + \tau \Lambda(\bar{\varphi}_n), n=0,1,2,\dots, \quad (14)$$

где  $\tau$  – шаг движения по градиенту,  $\Lambda(\bar{\varphi}_n)$  – значение градиента для функционала (13).

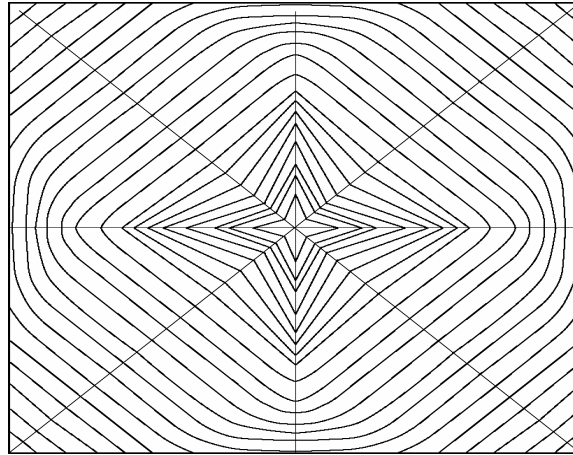
Расчеты проводились до выполнения с заданной точностью необходимого условия оптимальности – обращения в ноль градиента  $\Lambda$ .

Для выбранного начального приближения критическая сила потери устойчивости равнялась  $\lambda_1 = 1,343$ ; норма градиента, вычисляемая как  $\sqrt{\sum_i \Lambda_i^2}$ , равнялась  $0,77 * 10^{-1}$ . Полученное оптимальное распределение показано на рис.2. Касательная в каждой точке приведенных линий совпадает с направлением большей из осей ортотропии. Для полученного оптимального решения норма градиента равнялась  $0,3 * 10^{-3}$ , а само значение критической силы потери устойчивости  $\lambda_1(\varphi^{opt}) = 1,467$ .

Для сравнение приведем отношения найденного оптимального значения критической силы потери устойчивости и значения ее для распределения  $\varphi(x, y) \equiv 0, (x, y) \in \Omega$ :

$$\frac{\lambda_1(\varphi^{opt})}{\lambda_1(\varphi \equiv 0)} = 1,7. \quad (15)$$

Таким образом, видно, что влияние распределения угла анизотропии на значение критической силы потери устойчивости является существенным.



**Рис. 2.** Оптимальное распределение угла анизотропии для шарнирнозакрепленной пластины.

**Литература:**

1. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. - Москва: Наука, 1971.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. - Москва: Наука, 1977.
3. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. - Москва: Гостехиздат, 1957.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - Москва: Мир, 1975.
5. Баничук Н.В. Введение в оптимизацию конструкций. - Москва: Наука, 1986.

*Prezentat la 25.01.2007*